

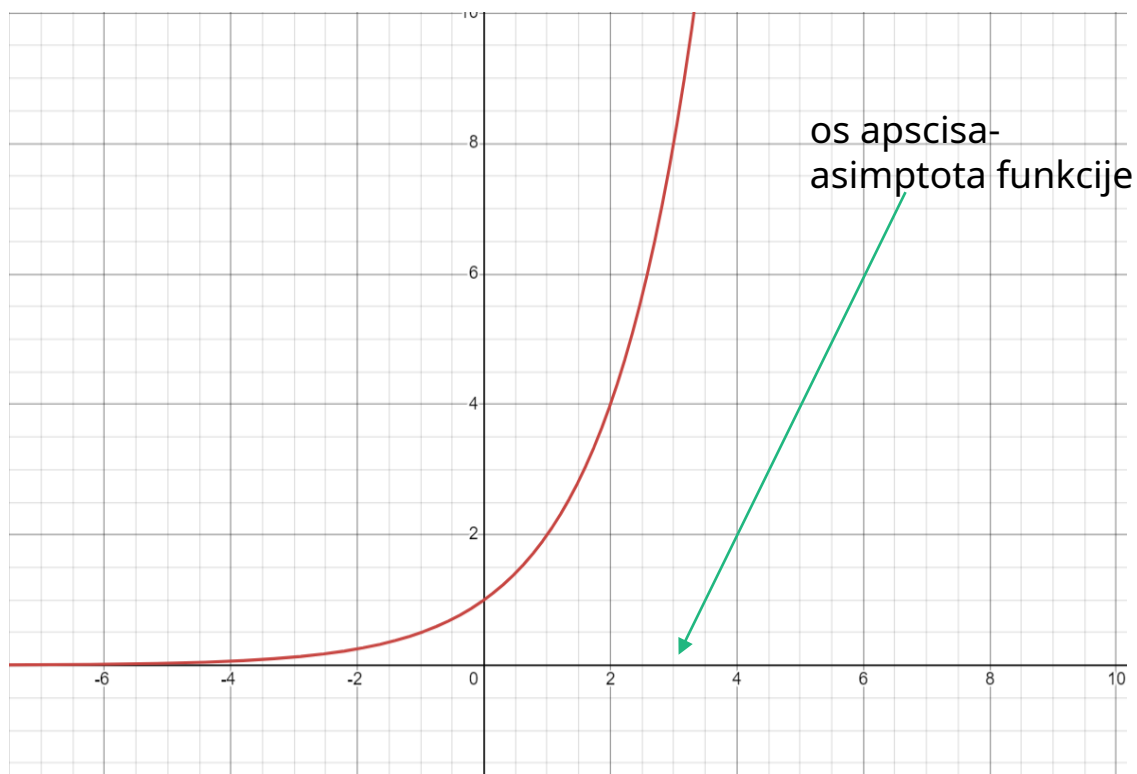
Povezanost eksponencijalne i logaritamske funkcije

Eksponencijalna funkcija

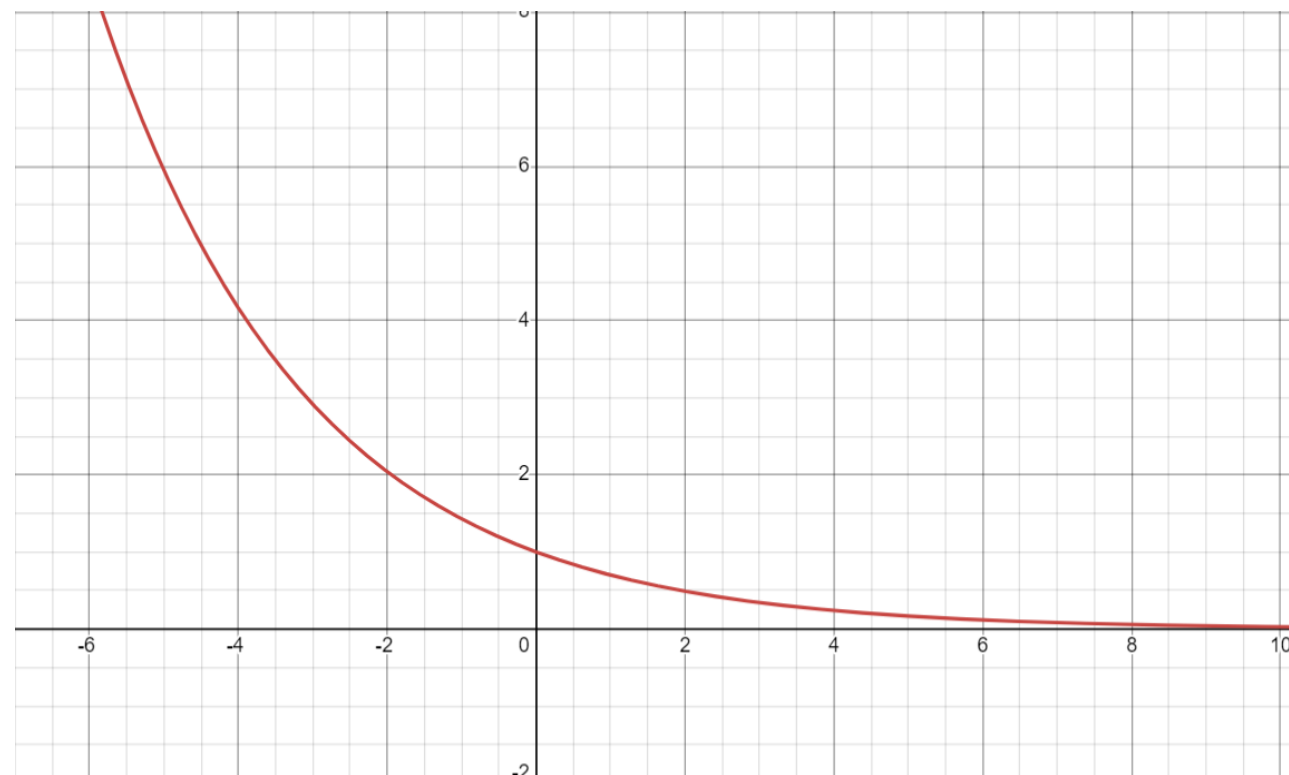
- Eksponencijalna funkcija je funkcija $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ oblika $f(x) = a^x$, pri čemu je $a > 0$, $a \neq 1$.
- Osim pravilom pridruživanja, eksponencijalna funkcija je definirana i:
 - domenom, $\mathbf{R}$
 - slikom funkcije $(0, \infty)$.
- S obzirom na bazu a , funkcija:
 - pada za $0 < a < 1$ te raste za $a > 1$
- Pomak funkcije po x-osi, tj. lijevo-desno, događa se kada eksponentu dodamo ili oduzmemo neki broj ($f(x) = a^{x+b}$, pomaknut za b prema lijevo ako je $b > 0$ ili desno ako je $b < 0$).
- Pomak funkcije po y-osi, tj. gore-dolje, događa se kada funkciji dodamo ili oduzmemo neki broj ($f(x) = a^x + b$, pomaknut za b prema gore ako je $b > 0$ ili dolje ako je $b < 0$).
- Graf eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$ približava se osi apscisa, ali je ne siječe. Kažemo da je os apscisa (pravac $y=0$) **asimptota** eksponencijalne funkcije.

Graf eksponencijalne funkcije

Primjer 1. $f(x)=2^x$ ($a>1$)



Primjer 2. $f(x)=0.7^x$ ($0<a<1$)



Pojam inverzne funkcije

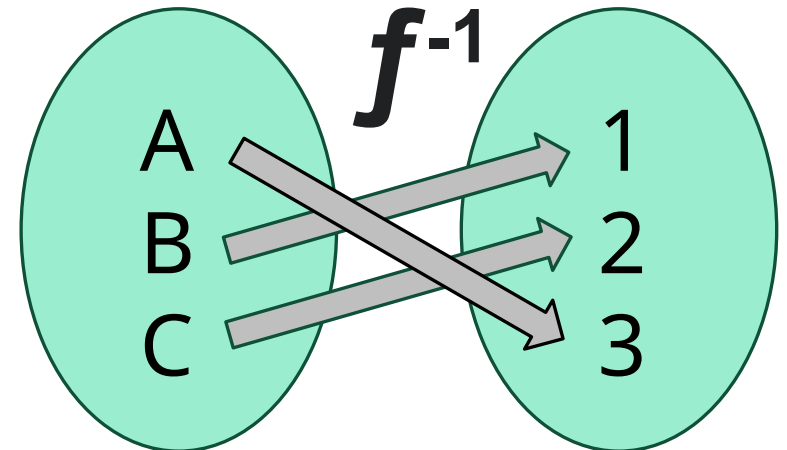
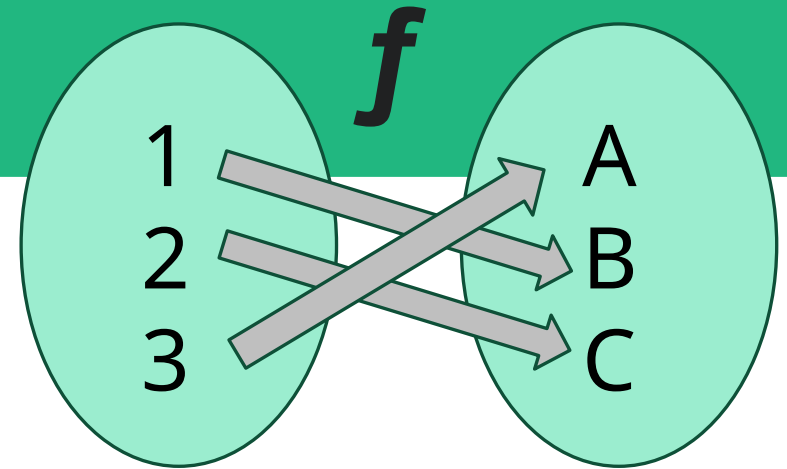
- Funkcija $g : K \rightarrow D$ **inverzna** je funkciji $f : D \rightarrow K$ ako vrijedi

$$g(f(x)) = x \text{ za sve } x \in D \text{ i } f(g(y)) = y \text{ za sve } y \in K.$$

- Oznaka: $g =: f^{-1}$.
- Ako za argument x u funkciji f dobijemo vrijednost funkcije y , tada za vrijednost argumenta y u inverznoj funkciji f^{-1} dobivamo vrijednost inverzne funkcije x (početni argument funkcije f)

$$f(x)=y \longrightarrow f^{-1}(y)=x$$

- Grafovi inverznih funkcija** međusobno su simetrični s obzirom na simetralu I. i III. kvadranta, odnosno pravac $y=x$. Ako točka (x,y) pripada grafu funkcije f , tada točka (y,x) pripada grafu funkcije f^{-1} .



Inverzna funkcija eksponencijalnoj funkciji

$$f(x)=a^x$$

$$a^x=y$$

$$x=\log_a y$$

$$a^{\log_a y}=y$$

- Kako bismo definirali inverznu funkciju eksponencijalne funkcije, potrebno je uvesti pojam logaritma.
- **Logaritam** po bazi a broja y je eksponent kojim trebamo potencirati bazu a da bi dobili y .

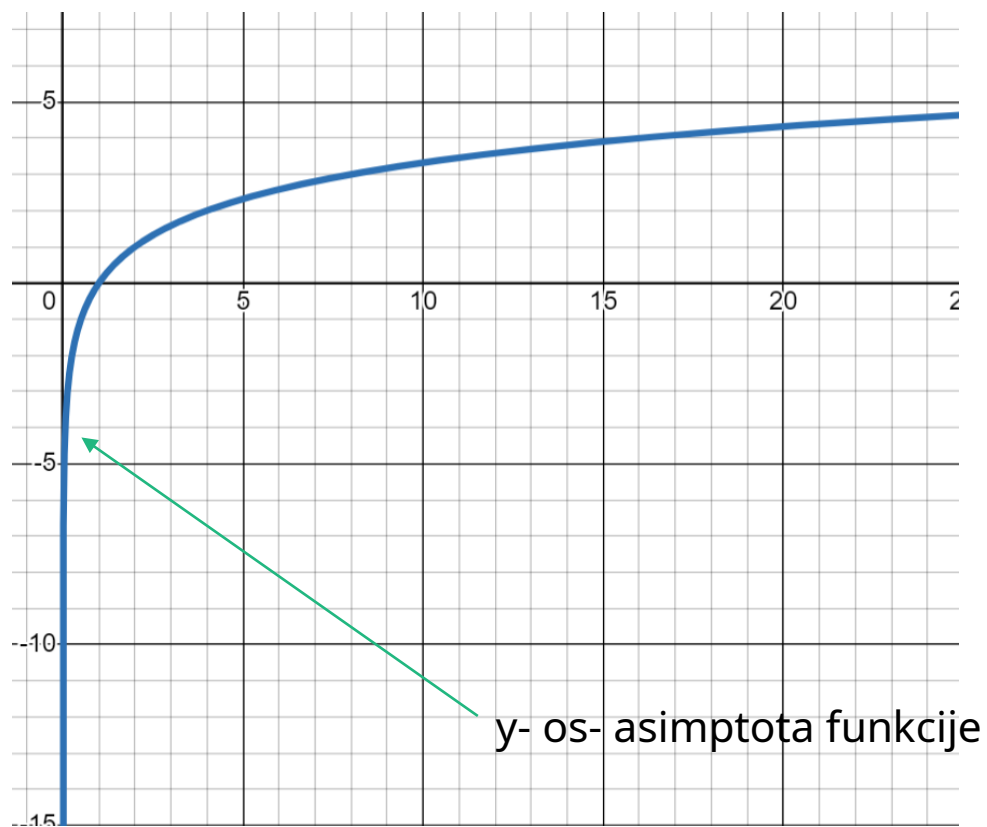
$$f^{-1}(x)=\log_a x$$

Logaritamska funkcija

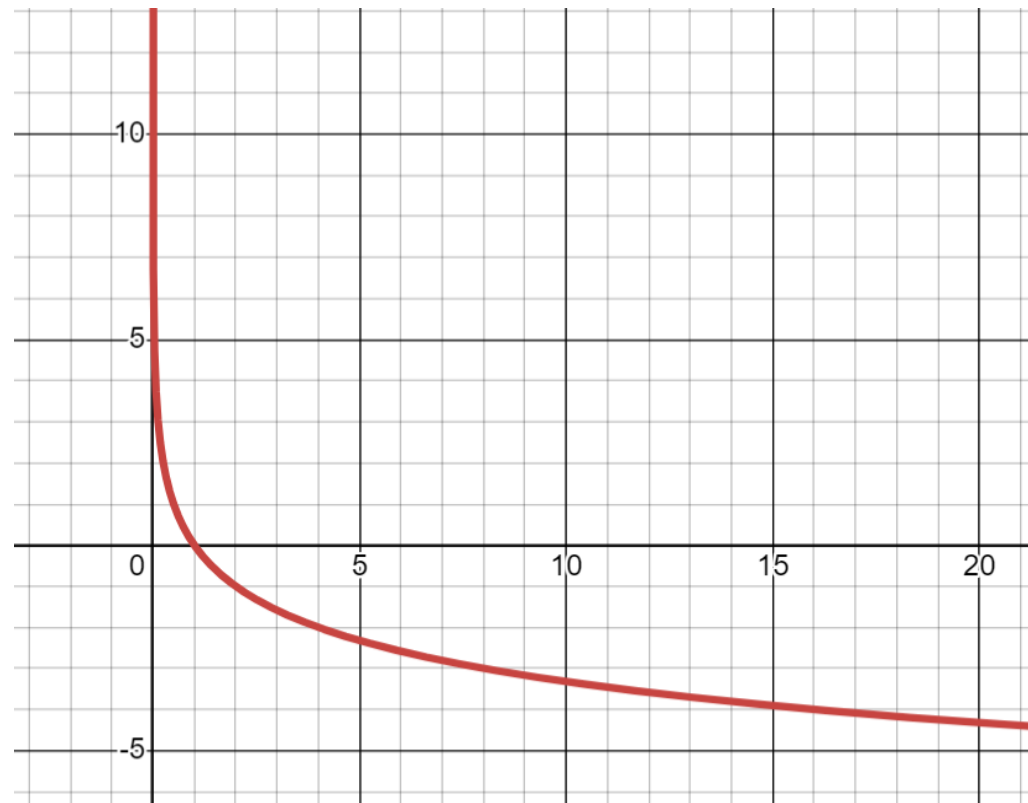
- Logaritamska funkcija s bazom a realna je funkcija oblika **$f(x)=\log_a x$** , pri čemu je $a>0$ i $a\neq 1$. **Domena** logaritamske funkcije skup je pozitivnih realnih brojeva **$\mathbf{R^+}$** . **Skup njezinih vrijednosti** jest cijeli skup **$\mathbf{R}$** .
- Ako je $a>1$, funkcija raste, a ako je $0<a<1$, funkcija pada.
- Pomak funkcije po y-osi, tj. gore-dolje, događa se kada funkciji dodamo ili oduzmemo neki broj ($f(x)=\log_a x+b$, pomaknut za b prema gore ako je $b>0$ ili dolje ako je $b<0$).
- Pomak funkcije po x-osi, tj. lijevo-desno, događa se kada funkciji dodamo ili oduzmemo neki broj. ($f(x)=\log_a(x+b)$ pomaknut za b prema lijevo ako je $b>0$ ili desno ako je $b<0$).
- Asimptota (pravac kojem se funkcija približava, ali ga nikad ne siječe) logaritamske funkcije je y-os, odnosno pravac $x=0$.

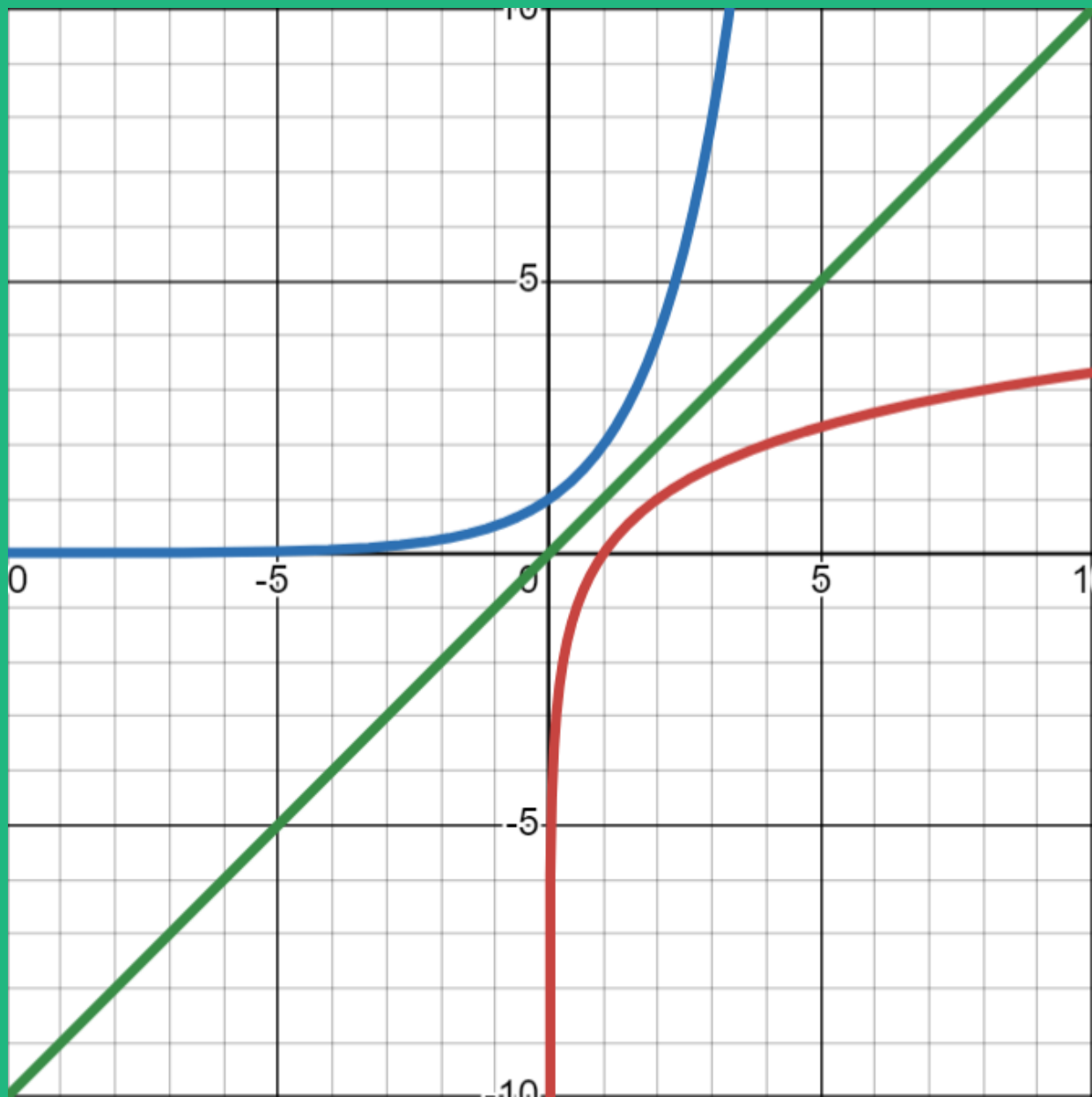
Graf logaritamske funkcije

Primjer 3. $f(x)=\log_2 x$



Primjer 4. $f(x)=\log_{0.5} x$





$$y = \log_2(x)$$



$$y = 2^x$$



$$y = x$$

Primjer 5. Grafovi funkcija $g(x) = \log_2 x$ i

$$f(x) = 2^x$$

Budući da su eksponencijalna i logaritamska funkcija međusobno inverzne, njihovi su grafovi simetrični s obzirom na pravac $y = x$.

- Logaritam po bazi 10 nazivamo **dekadski logaritam** i označavamo $\log_{10} x = \mathbf{\log x}$.
- Logaritam po bazi $e \approx 2.718281828459...$ nazivamo **prirodni logaritam** i označavamo $\log_e x = \mathbf{\ln x}$
- Primjena eksponencijalne i logaritamske funkcije je raširena u svim područjima života, ali i granama znanosti. Eksponencijalne funkcije opisuju primjerice rast populacije, složeno ukamaćivanje, a logaritamske razinu intenziteta zvuka, pH vrijednost otopine, intenzitet potresa...